OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A V-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Produsul a două numere este 540. Dacă primul număr s-ar mări cu 5, atunci produsul lor ar fi 600. Aflați numerele.

Manual Matematică pentru clasa a 5-a, Editura Radical

2. Fie numărul natural $n = \overline{11\ldots1} + \overline{22\ldots2} + \ldots + \overline{88\ldots8} + \overline{99\ldots9}$, fiecare număr de forma $\overline{aa\ldots a}$ conținând câte 2015 cifre de a. Determinați câte cifre de 9 conține numărul n.

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

3. Se consideră 5 numere naturale cu media aritmetică egală cu 24. Împărțind pe rând primul număr la suma dintre al doilea și al treilea, apoi al doilea număr la suma dintre al treilea și al patrulea, iar la final pe al treilea la suma dintre al patrulea și al cincilea se obține de fiecare dată câtul 2 și restul 1. Știind că ultimele două numere sunt consecutive, aflați numerele.

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

4. Determinați numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ba}+\overline{ab}$ și $\overline{ba}-\overline{ab}$ sunt pătrate perfecte.

George Florin Șerban, Brăila, problema E14813, GM 4/2015

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VI-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.

1. Demonstrați că numerele naturale, care împărțite în $\mathbb{N}$ la 102 dau restul 78, sunt divizibile cu 3.

Manual Matematică pentru clasa a 6-a, Editura Radical

2. Fie unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ astfel încât raportul măsurilor să fie $\frac{1}{4}$. Fie $[OD$ semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\sphericalangle BOC$. În interiorul unghiului $\sphericalangle COD$ se consideră punctele M și N astfel încât $m(\sphericalangle CON) = m(\sphericalangle DOM) = 2 \cdot m(\sphericalangle MON) > 45^0$.

a) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle COD$.

b) Demonstrați că punctele B, O, M sunt coliniare.

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

3. Se consideră unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, astfel încât bisectoarele lor $[OM$ și $[ON$ să formeze un unghi de 75^0.

a) Să se determine $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle BOC)$ știind că $3 \cdot m(\sphericalangle AOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle BOC)$.

b) Dacă semidreapta $[OT$ formează unghi drept cu semidreapta $[OM$ astfel încât punctele M și T sunt de aceeași parte cu punctul B față de OA. Calculați: $m(\sphericalangle TON)$, $m(\sphericalangle BON)$, $m(\sphericalangle BOT)$ și $m(\sphericalangle COT)$.

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

4. Determinați numerele naturale n știind că fracția $\frac{3n+1}{2n-7}$ este reductibilă.

Horațiu Morar, Bistrița, problema E:14832, GM 5/2015

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Enumerați elementele mulțimilor:

$$A=\left\{a\in\mathbb{Q}\,\middle|\,a=\sqrt{\frac{2-x}{4}},x\in\mathbb{N}^*\right\}\text{ și }B=\left\{x\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,a=\sqrt{\frac{2-x}{9}},a\in\mathbb{Q}\right\}.$$

Determinați $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$.

Manual Matematică pentru clasa a VII-a, Editura Teora

2. Fie $x\neq -1,\ y\neq -2,\ z\neq -3$ numere raționale, astfel încât $\frac{2015}{x+1}+\frac{2015}{y+2}+\frac{2015}{z+3}=2014$. Calculați $\frac{x-1}{x+1}+\frac{y}{y+2}+\frac{z+1}{z+3}$.

Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

3. În triunghiul oarecare ABC, se consideră M şi N mijloacele segmentelor BC, respectiv AM, punctul D simetricul punctului C față de A, $BN\cap AC=\{S\}$, $DM\cap AB=\{T\}$ și punctul P mijlocul segmentului $[SC]$.

a) Demonstrați că $AC=3PC$.

b) Demonstrați că dreptele ST și BC sunt paralele.

c) Calculați aria triunghiului ANS, știind că aria triunghiului ABC este egală cu 48cm^2.

Olimpiadele şi concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0$ și P un punct variabil pe $[AD]$. Arătați că suma $PB+PC$ este minimă dacă și numai dacă $\frac{AP}{DP}=\frac{AB}{CD}$.

Ion Voicu, Rădulești, Ialomița, problema E:14791, GM 2/2015

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ 19.02.2016 –

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Fie $a \in \mathbb{R}$. Demonstrați că dacă $a^{18} \in \mathbb{Q}$ și $a^{11} \in \mathbb{Q}$, atunci $a \in \mathbb{Q}$.

Manual Matematică pentru clasa a VIII-a, Dana Radu și Eugen Radu, Editura Teora

2. Determinați valorile întregi ale lui x și y astfel încât

$$x-3y+4=0 \quad \text{și} \quad \sqrt{x^2+7y^2+8x+8y+4} \in \mathbb{Q}.$$

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ considerăm Q proiecția lui D' pe $A'C$ și S proiecția lui D' pe AC'. Arătați că:

a) $A'C \perp (D'QB')$;

b) $QS \parallel (ABC)$.

Olimpiadele și concursurile de matematică V-VIII 2015, Editura Bîrchi

4. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată. Punctul M este mijlocul înălțimii VO, punctul N este mijlocul segmentului BM, iar $P \in [AO]$ astfel încât $AP = 3 \cdot PO$. Demonstrați că $PN \parallel (VDC)$.

Traian Preda, București, problema E:14779 GM 1/2015